

§5. Біртексіз сызықты теңдеулер

5.1. Төмендегідей біртексіз сызықты теңдеуді қарастырайық:

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

Мұнда да коэффициенттер мен бос мүше кейбір $\langle a, b \rangle$ аралығында үздіксіз функциялар деп есептелінеді. Осы теңдеудің сәйкес біртектісін қоса қарастырайық:

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0 \quad (2)$$

Бұл екі теңдеудің шешімдерінің арасында тығыз байланыстар бар.

1⁰. Егер $\tilde{y}$ біртексіз (1) теңдеудің шешімі, ал y_1 біртекті (2) теңдеудің шешімі болса, онда $y = \tilde{y} + y_1$ функциясы (1) теңдеудің шешімін береді.

Шынында да, $L[\tilde{y}] = f(x), L[y_1] = 0, \forall x \in \langle a, b \rangle$. Осыдан $L[\tilde{y} + y_1] = L[\tilde{y}] + L[y_1] = f(x), \forall x \in \langle a, b \rangle$.

2⁰. Егер $\tilde{y}_1$ және $\tilde{y}_2$ функциялары (1) теңдеудің шешімдері болса, онда олардың айырмасы (2) теңдеудің шешімін береді.

Шынында да, $L[\tilde{y}_1] = f(x), L[\tilde{y}_2] = f(x)$. Осыдан $L[\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2] = L[\tilde{y}_1] - L[\tilde{y}_2] = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in \langle a, b \rangle$.

3⁰. Егер (1) теңдеуде $f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x)$ болса, ал y_i функциясы $L[y] = f_i(x)$ теңдеуінің шешімі болса, онда

$$L\left[\sum_{i=1}^m y_i\right] = \sum_{i=1}^m L[y_i] = \sum_{i=1}^m f_i(x), \forall x \in \langle a, b \rangle$$

Бұл қасиетті суперпозиция қасиеті деп атайды.

4⁰. Егер (1) теңдеудің оң жағы комплексты функция болса $f(x) = u(x) + iv(x)$, ал $y(x) = \alpha(x) + i\beta(x)$ комплексты функция сол теңдеудің шешімі болса, онда нақты $\alpha(x)$ және $\beta(x)$ функциялары сәйкес $L[y] = u(x)$ және $L[y] = v(x)$ теңдеулерінің шешімдері болады.

Шынында да, $L[\alpha(x) + i\beta(x)] = u(x) + iv(x)$. Осыдан $L[\alpha(x)] = u(x), L[\beta(x)] = v(x)$ тепе-теңдіктері шығады.

Осы қасиеттерді пайдалансақ, төмендегідей қорытындыға келеміз.

Теорема. Біртексіз (1) теңдеудің жалпы шешімі осы теңдеудің бір дербес шешімі мен сәйкес біртекті (2) теңдеудің жалпы шешімінің қосындысынан тұрады.

Дәлелдеуі. Айталық, $y_1, y_2, \dots, y_n$ біртекті (2) теңдеудің фундаменталь шешімдер жүйесі болсын, ал $\tilde{y}$ функциясы біртексіз (1) теңдеудің бір дербес шешімі болсын. Бұл жағдайда

$$y(x) = \tilde{y}(x) + \sum_{i=1}^n C_i y_i(x) \quad (3)$$

қосындысы берілген аралықта (1) теңдеудің жалпы шешім болатынын көрсетейік. Мұнда $C_1, \dots, C_n$ - еркін тұрақтылар. 1⁰ - қасиет бойынша (3) қосынды (1) теңдеудің шешімі:

$$L\left[\tilde{y} + \sum_{i=1}^n C_i y_i\right] = L[\tilde{y}] + \sum_{i=1}^n C_i L[y_i] = f(x), \forall x \in \langle a, b \rangle$$

Енді осы шешімнен кез келген Коши есебінің жалғыз ғана шешімін алуға болатынын көрсетсек, жеткілікті. Бастапқы шартты

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \quad (4)$$

түрінде алсақ, онда төмендегідей жүйе аламыз:

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= \tilde{y}(x_0) + \sum_{i=1}^n C_i y_i(x_0) \\ y_0' &= \tilde{y}'(x_0) + \sum_{i=1}^n C_i y_i'(x_0) \\ &\dots\dots\dots \\ y_0^{(n-1)} &= \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) + \sum_{i=1}^n C_i y_i^{(n-1)}(x_0) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Бұл жүйе $C_1, \dots, C_n$ сандары бойынша сызықты біртекті алгебралық жүйе. Оның анықтаушы $\Delta = W(x_0) \neq 0$. Сондықтан, жүйенің нөлдік емес жалғыз ғана шешімі бар: $C_1^0, \dots, C_n^0$. Осы сандарды (3) қатынасқа қойсақ, (1) теңдеудің (4) шартты қанағаттандыратын жалғыз ғана шешім аламыз.

5.2. Біртексіз теңдеудің жалпы шешімін табу үшін әдетте, тұрақтыларды вариациялау әдісі қолданылады. Бұл әдістің мәнісі – сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі белгілі деп, ондағы еркін тұрақтыларды x -қа байланысты айнымалы шамалар деп есептелініп, шешім мына түрде ізделінеді:

$$y = \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i \quad (6)$$

мұндағы, $y_1, y_2, \dots, y_n$ - біртекті теңдеудің фундаменталь шешімдері. Осындағы $C_1(x), \dots, C_n(x)$ функцияларын (6) қосынды (1) теңдеудің шешімі болатындай етіп таңдайды. Бұл функцияларды анықтау үшін n теңдеу керек. Ол үшін (6) өрнекті n ретке дейін дифференциалдаймыз. Мұнда $C_1(x), \dots, C_n(x)$ функцияларының туындыларына қосымша шарт қойылып отырады.

Сонымен,

$$y' = \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i' + \sum_{i=1}^n C_i'(x) y_i$$

Осындағы екінші қосындыны нөлге теңейміз:

$$\sum_{i=1}^n C_i'(x) y_i = 0$$

Қалған бірінші қосындыдан екінші туынды табамыз:

$$y'' = \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i'' + \sum_{i=1}^n C_i'(x) y_i'$$

Осындағы екінші қосындыны тағы да нөлге теңейміз:

функциясын аламыз. Бұл функция өзінің құрылымы бойынша (1) теңдеудің шешімі. Мұндағы, бірінші қосынды (1) теңдеудің дербес шешімін, екінші қосынды біртекті

теңдеудің жалпы шешімін білдіреді. Сонымен, бастапқы айтылған қағидаға қайта келдік: біртектісіз теңдеудің жалпы шешімі осы теңдеудің бір дербес шешімі мен оның сәйкес біртектісінің жалпы шешімінің қосындысынан тұрады.